

## الارتباط بين الخواص الكينماتيكية والخواص الفيزيائية للنجوم

عدنان عبد الله جوهرجي

قسم العلوم الفلكية، كلية العلوم، جامعة الملك عبد العزيز

جدة - المملكة العربية السعودية

المستخلص. في هذا البحث، تم بعون الله عرض صيغ تحليلية لبعض الإحداثيات الرأسية للمجسم الأهليجي الخاص بسرعات النجوم الفضائية. وقد استخدمت هذه الصيغ في دراسة الارتباط بين الخواص الكينماتيكية (السرعة المتبقية) والخواص الفيزيائية (الأنواع الطيفية أو درجات الحرارة) للنجوم. اشتملت الدراسة على ٢٦٦٠ نجم من مختلف الأنواع الطيفية. وقد تم تكوين علاقات رياضية تربط بين بعض الإحداثيات الرأسية ودرجات حرارة النجوم.

### ١ - مقدمة

تمثل السرعات المتبقية للنجوم (stellar residual velocities) أحد العناصر الأساسية للخواص الكينماتيكية، بينما يمثل التصنيف الطيفي للنجوم (stellar spectral types) أحد العناصر الرئيسية للخواص الفيزيائية. وبمعرفة العلاقة بين هذين العنصرين يمكننا كشف الستار عن كثير من خواص النجوم الطبيعية. ولاشك أن دراسة العلاقة بين السرعات المتبقية للنجوم وتصنيفها الطيفي تتطلب منا وضع أساسيات لدراسة سرعات النجوم وإيجاد عناصر المجسم الأهليجي (ellipsoid) لها، وقد تم ذلك لبعض المناطق السماوية ولحشود نجمية مختلفة بواسطة أيجن وغيره من الباحثين.

في هذا البحث سوف نقوم بتلخيص نظرية المجسم الأهليجي لتوزيع السرعات المتبقية للنجوم (الجزء ٢) ومن ثم استحداث الصيغ التحليلية التي لا تحتوي على أي تقريب لبعض الإحداثيات الرأسية اللازمة لدراسة الارتباط بين السرعات المتبقية للنجوم وتصنيفها الطيفي (الجزء ٣). وسوف يتم استنتاج هذه الإحداثيات بدلالة عناصر مصفوفة القيم الخاصة بالمجسم الأهليجي للسرعات المتبقية للنجوم. في الجزء ٤، سنقوم بتطبيق هذه الصيغ التحليلية على مجموعة من النجوم نختارها بحيث تغطي جميع الأنواع الطيفية وتصنيفاتها الفرعية لمعرفة التفاصيل الدقيقة لسرعات كل تصنيف طيفي. ويربط هذه التفاصيل ببعضها البعض سنحصل على الشكل العام الذي يحكم التوزيع وهذا بدوره سيؤدي إلى إيجاد ارتباطات قوية بين السرعات المتبقية للنجوم وتصنيفها الطيفي. ومما لا شك فيه، إن تحديد العلاقات الرياضية التي تربط بين متغيرات المجسم الأهليجي والتصنيف الطيفي سوف تسهل وبدرجة كبيرة مهمة الباحثين في مجال حركات النجوم.

## ٢ - التكوينات النظرية للمجسم الأهليجي

المبادئ الأساسية للتكوينات الرياضية مشروحة بإسهاب في بعض المصادر [1,2,3,4] ومعادلات المجسم الأهليجي متوفرة في بعض المراجع [5,6]. هنا سنلخص فقط المعادلات التي سنحتاجها في الجزء (٣) لاشتقاق العلاقات الرياضية لبعض الإحداثيات الرأسية للمجسم الأهليجي والتي نرغب في معرفة مدى ارتباطها بالتصنيف الطيفي.

### ٢, ١ - المركبات الاستوائية للسرعة الفضائية

في نظام الإحداثيات الاستوائية الشمسية نفترض أن الشمس مركزاً للمحاور الإحداثية (x,y,z) بحيث يشير محور x إلى النقطة ( $\alpha = 0^\circ$ ,  $\delta = 0^\circ$ ) ويشير محور y إلى النقطة ( $\alpha = 6^h$ ,  $\delta = 0^\circ$ ) ويشير محور z إلى القطب الشمالي للكرة السماوية. ويمكن حساب مركبات السرعة الفضائية في هذا النظام (X,Y,Z) من المعادلات الآتية:

$$\begin{aligned} X &= -4.74r\mu_\alpha \cos \delta \sin \alpha - 4.74r\mu_\delta \sin \delta \cos \alpha + \rho \cos \delta \cos \alpha \\ Y &= +4.74r\mu_\alpha \cos \delta \sin \alpha + 4.74r\mu_\delta \sin \delta \sin \alpha + \rho \cos \delta \sin \alpha \\ Z &= +4.74r\mu_\delta \cos \delta + \rho \sin \delta \end{aligned} \quad (1)$$

مع ملاحظة إنه إذا قيس بُعد النجم عن الشمس ( $r$ ) بالبارسك والمركبات الاستوائية للحركة الذاتية ( $\mu_\alpha, \mu_\delta$ ) بالثواني القوسية لكل سنة والسرعة القطرية ( $\rho$ ) بالكيلومتر في الثانية ، فإن مركبات السرعة الفضائية ستكون بوحد الكيلومتر في الثانية .

## ٢, ٢ - المركبات المجرية للسرعة الفضائية

في نظام الإحداثيات المجرية نفترض أن الشمس مركزاً للمحاور الإحداثية ( $u, v, w$ ) بحيث يشير محور  $w$  إلى القطب الشمالي للمجرة ومحور  $v$  إلى النقطة ( $l = 90^\circ, b = 0^\circ$ ) بينما يشير محور  $u$  إلى مركز المجرة ( $l = 0^\circ, b = 0^\circ$ ) في النظام القديم (I) أو إلى النقطة ( $l = 180^\circ, b = 0^\circ$ ) في النظام الجديد (II) . يمكن إيجاد مركبات السرعة الفضائية في نظام الإحداثيات المجرية ( $U, V, W$ ) عن طريق التحويل من المركبات ( $X, Y, Z$ ) ويتم ذلك بإجراء بعض الدورانات المناسبة للمحاور حيث نحصل على المعادلات التالية :

$$U = \pm(0.06699)X \pm(0.87276)Y \pm(0.48354)Z, \quad (2.1)$$

$$V = +(0.49273)X -(0.45035)Y +(0.74458)Z, \quad (2.2)$$

$$W = -(0.86760)X -(0.18837)Y +(0.46020)Z, \quad (2.3)$$

وفي حساب  $U$  من المعادلة (2.1) ، نستخدم الإشارة الموجبة إذا كانت المركبات منسوبة إلى النظام I والإشارة السالبة إذا كانت المركبات منسوبة إلى النظام II .

## ٢, ٣ - توزيع السرعات المتبقية للنجوم

افترض أن لدينا مجموعة نجمية عدد أفرادها  $N$  والمركبات المجرية للسرعة الفضائية لأحد الأفراد وليكن  $i$  هي  $U_i, V_i, W_i$  . عندئذ يمكننا تعريف متجه السرعة المتوسطة لهذه المجموعة النجمية بالمركبات  $\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$  والتي تعطي بالمعادلات الآتية :

$$\bar{U} = (1/N) \sum_{i=1}^N U_i, \quad (3.1)$$

$$\bar{V} = (1/N) \sum_{i=1}^N V_i, \quad (3.2)$$

$$\bar{W} = (1/N) \sum_{i=1}^N W_i, \quad (3.3)$$

النقطة التي تتحرك بالسرعة المتوسطة للمجموعة يطلق عليها المركز المتوسط ويطلق على سرعة النجم المنسوبة إلى المركز المتوسط بالسرعة المتبقية للنجم . وبهذا التعريف تكون مركبات السرعة المتبقية للنجم  $i$  هي  $(U_i - \bar{U}); (V_i - \bar{V}); (W_i - \bar{W})$  .

لدراسة توزيع السرعات المتبقية لمجموعة  $N$  من النجوم ، نعتبر محوراً افتراضياً تنطبق نقطة أصله على مركز التوزيع  $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$  وله جيوب التمام الاتجاهية  $(\ell, m, n)$  بالنسبة للمحاور المنقولة إلى مركز التوزيع . ومن ثم فإن إحداثي النقطة التمثيلية  $i$  بالنسبة للمحور الافتراضي يمكن كتابته بالصورة الآتية :

$$Q_i = \ell(U_i - \bar{U}) + m(V_i - \bar{V}) + n(W_i - \bar{W}) \quad (4)$$

والآن دعنا نستعمل الكمية  $\sigma$  كمقياس لتشتت مركبات  $Q_i$  ، علماً بأن الكمية

$$\sigma^2 = (1/N) \sum_{i=1}^N Q_i^2 \quad (5)$$

تمثل إلى حد كبير تعميماً لمتوسط مربعات الانحراف (dispersion) والذي يستعمل دائماً لتوصيف توزيع قيم متغير عشوائي حول قيمته المتوسطة . وبالنسبة لقيم الإحداثيات  $(U_i, V_i, W_i; i = 1, 2, 3)$  ومتوسطاتها  $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$  نجد أن  $\sigma^2$  تصبح دالة في جيوب التمام الاتجاهية  $(\ell, m, n)$  . ويبدو واضحاً إنه في اتجاهات معينة يطلق عليها محاور التوزيع تصل إلى قيمتها النهائية .

سوف ندرس الآن توزيع السرعات المتبقية تحليلياً وذلك لتحديد الاتجاه الذي تصل فيه  $\sigma^2$  إلى قيمتها النهائية وكذلك قيم  $\sigma^2$  في هذا الاتجاه . يمكننا بالطبع صياغة المسألة المراد حلها بإيجاد القيم النهائية للدالة

$$F(\ell, m, n) = (1/N) \sum_{i=1}^N \left[ \ell(U_i - \bar{U}) + m(V_i - \bar{V}) + n(W_i - \bar{W}) \right]^2 \quad (6)$$

حيث إن المتغيرات  $\ell, m, n$  مقيدة بالشرط

$$f(\ell, m, n) = \ell^2 + m^2 + n^2 - 1 = 0 \quad (7)$$

ولوجود العلاقة (7) بين المتغيرات  $\ell, m, n$  فإن القيم النهائية لا يمكن تعيينها بمساواة المشتقات الجزئية للدالة  $f(\ell, m, n)$  بالصفر ولكن يجب أن تحل المسألة باستخدام

مضاعفات لاجرانج كما يلي : نضرب معادلة الشرط (7) في الكمية  $(-\lambda)$  ثم نجمعها مع المعادلة (6) فنحصل على

$$F(\ell, m, n) = F(\ell, m, n) - \lambda f(\ell, m, n) \quad (8)$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة

$$F(\ell, m, n) = (\mu_{11} - \lambda) \ell^2 + (\mu_{22} - \lambda) m^2 + (\mu_{33} - \lambda) n^2 + 2\mu_{12} \ell m + 2\mu_{13} \ell n + 2\mu_{23} mn + \lambda \quad (9)$$

حيث إن

$$\mu_{11} = (1/N) \sum_{i=1}^N U_i^2 - (\bar{U})^2, \quad (10.1)$$

$$\mu_{12} = \mu_{21} = (1/N) \sum_{i=1}^N U_i V_i - \bar{U}\bar{V}, \quad (10.2)$$

$$\mu_{13} = \mu_{31} = (1/N) \sum_{i=1}^N U_i W_i - \bar{U}\bar{W}, \quad (10.3)$$

$$\mu_{22} = (1/N) \sum_{i=1}^N V_i^2 - (\bar{V})^2, \quad (10.4)$$

$$\mu_{23} = \mu_{32} = (1/N) \sum_{i=1}^N V_i W_i - \bar{V}\bar{W}, \quad (10.5)$$

$$\mu_{33} = (1/N) \sum_{i=1}^N W_i^2 - (\bar{W})^2. \quad (10.6)$$

وييجاد المشتقات الجزئية للدالة F من المعادلة (9) تؤول الشروط الضرورية للقيمة النهائية

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \ell} = 0; \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial m} = 0; \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial n} = 0 \quad (11)$$

إلى نظام خطي متجانس على الصورة

$$(\mu_{11} - \lambda) \ell + \mu_{12} m + \mu_{13} n = 0, \quad (12.1)$$

$$\mu_{12} \ell + (\mu_{22} - \lambda) m + \mu_{23} n = 0, \quad (12.2)$$

$$\mu_{13} \ell + \mu_{23} m + (\mu_{33} - \lambda) n = 0. \quad (12.3)$$

ويمكن كتابة هذه المعادلات الخطية على هيئة مصفوفات في الصورة

$$C \underline{h} = \lambda \underline{h} \quad (13)$$

حيث  $C$  مصفوفة حقيقية ومتماثلة :

$$C = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{12} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{13} & \mu_{23} & \mu_{33} \end{pmatrix} \quad (14)$$

والعمود الاتجاهي  $\underline{h}$  هو

$$\underline{h} = \begin{pmatrix} \ell \\ m \\ n \end{pmatrix} \quad (15)$$

وبذلك تكون المسألة قد آلت إلى حل النظام (13) والذي يعرف في جبر المصفوفات باسم « مسألة القيم الخاصة ». هذا ويمكن بسهولة إثبات أن الكميات  $\langle \underline{h}, C \underline{h} \rangle$  و  $\lambda$  تكون دائماً حقيقية وأن المتجهات الخاصة  $\underline{h}$  المصاحبة لقيم  $\lambda$  المختلفة (غير المكررة) هي متجهات متعامدة .

لحل المعادلة (13)، نفترض أن  $I$  هو مصفوفة الوحدة من الدرجة الثالثة ونكتب هذه المعادلة بالشكل الآتي :

$$(C - \lambda I) \underline{h} = 0 \quad (16)$$

وحيث إن النظام (16) يمثل معادلات متجانسة في ثلاث مجاهيل  $(\ell, m, n)$  فإن له حل غير الحل التافه  $\underline{h} = 0$  إذا وإذا فقط تلاشت محدودة النظام أي أن

$$D(\lambda) = |C - \lambda I| = \begin{vmatrix} \mu_{11} - \lambda & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{12} & \mu_{22} - \lambda & \mu_{23} \\ \mu_{13} & \mu_{23} & \mu_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

تسمى هذه المعادلة بالمعادلة المميزة للمصفوفة  $C$ . بفك المحدودة نجد أن

$$-D(\lambda) = \lambda^3 + K_1 \lambda^2 + K_2 \lambda + K_3 = 0 \quad (18)$$

حيث إن

$$K_1 = -(\mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{33}), \quad (19.1)$$

$$K_2 = \mu_{11}\mu_{22} + \mu_{11}\mu_{33} + \mu_{22}\mu_{33} - (\mu_{12}^2 + \mu_{13}^2 + \mu_{23}^2), \quad (19.2)$$

$$K_3 = \mu_{12}^2\mu_{33} + \mu_{13}^2\mu_{22} + \mu_{23}^2\mu_{11} - \mu_{11}\mu_{22}\mu_{33} - 2\mu_{12}\mu_{13}\mu_{23}. \quad (19.3)$$

الجدور  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  في المعادلة (18) ذات الدرجة الثالثة هي جذور حقيقية ومختلفة وبالتالي يمكن كتابتهم بالصور الآتية :

$$\lambda_1 = 2\xi^{(1/3)}\cos(\phi/3) - \frac{K_1}{3}, \quad (20.1)$$

$$\lambda_2 = -\xi^{(1/3)}\left[\cos(\phi/3) + \sqrt{3}\sin(\phi/3)\right] - \frac{K_1}{3}, \quad (20.2)$$

$$\lambda_3 = -\xi^{(1/3)}\left[\cos(\phi/3) - \sqrt{3}\sin(\phi/3)\right] - \frac{K_1}{3}. \quad (20.3)$$

حيث إن

$$\xi = \sqrt{-q^3}; \quad q = (1/3)K_2 - (1/9)K_1^2, \quad (21)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\sqrt{\psi/\varepsilon}\right); \quad \psi = \xi^2 - \varepsilon^2; \quad \varepsilon = (1/6)(K_1K_2 - 3K_3) - (1/27)K_1^3 \quad (22)$$

حل النظام المتجانس (12) لقيم جيوب التمام الاتجاهية ، نفترض أن  $\lambda_i$  هي واحدة من الجذور الثلاث وأن  $(\ell_i, m_i, n_i)$  هي قيم  $(\ell, m, n)$  المناظرة لهذا الجذر مع استخدام معادلة الشرط (7) نجد أن :

$$\ell_i = G_{11}^{(i)}/R_i; \quad i = 1, 2, 3 \quad (23.1)$$

$$m_i = G_{12}^{(i)}/R_i; \quad i = 1, 2, 3 \quad (23.2)$$

$$n_i = G_{13}^{(i)}/R_i; \quad i = 1, 2, 3 \quad (23.3)$$

حيث إن

$$G_{11}^{(i)} = (\mu_{22} - \lambda)(\mu_{33} - \lambda_i) - \mu_{23}^2, \quad (24.1)$$

$$G_{12}^{(i)} = -\mu_{12}(\mu_{33} - \lambda_i) + \mu_{23}\mu_{13}, \quad (24.2)$$

$$G_{13}^{(i)} = \mu_{12}\mu_{23} - \mu_{13}(\mu_{22} - \lambda_i). \quad (24.3)$$

$$R_i^2 = [G_{11}^{(i)}]^2 + [G_{12}^{(i)}]^2 + [G_{13}^{(i)}]^2. \quad (25)$$

دعنا الآن نبحث عن مقدار التشتت  $\sigma_i$  المصاحب للاتجاه  $(\ell_i, m_i, n_i)$ . باستخدام المعادلات (4) و (5) و (10) نجد أن

$$\sigma^2 = \ell^2 \mu_{11} + m^2 \mu_{22} + n^2 \mu_{33} + 2\ell m \mu_{12} + 2\ell n \mu_{13} + 2mn \mu_{23} \quad (26)$$

وهذه المعادلة تمثل صيغة ثنائية وبالتالي يمكن كتابتها على الصورة

$$\sigma^2 = \underline{h}^T C \underline{h} = \underline{h}^T \lambda \underline{h} \quad (27)$$

حيث إن  $\underline{h}^T$  هو منقول  $\underline{h}$ ، ويمكن كتابة هذه المعادلة بالصورة

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 = \lambda_i \langle \underline{h}, \underline{h} \rangle \quad (28)$$

ونظراً لأن  $\langle \underline{h}, \underline{h} \rangle = 1$ ، فإن مقدار التشتت هو

$$\sigma_i^2 = \pm \sqrt{\lambda_i}; \quad i = 1, 2, 3. \quad (29)$$

وبهذا نكون قد حصلنا على المعادلات اللازمة لدراسة المجسم الأهليجي تحليلياً من غير أدنى تقريب على الإطلاق.

### ٣ - الإحداثيات الرأسية للمجسم الأهليجي

إن دراسة الارتباطات بصفة عامة تستلزم تحديد الإحداثي (أو الإحداثيات) الأفقي والذي من المحتمل أن يرتبط مع الإحداثي (أو الإحداثيات) الرأسي بعلاقة (أو علاقات) دالية معينة، ثم إجراء الاختبارات الإحصائية لمعرفة ما إذا كان هناك ارتباط أم لا. وفي حالة وجود ارتباط فما مدى معنويته.

في بحثنا هذا خصصنا الإحداثي الأفقي للتعبير عن أحد الخواص الفيزيائية للنجوم (التصنيف الطيفي أو درجة حرارة النجم). بالنسبة للإحداثيات الرأسية فقد اخترنا لها بعض الدوال التي تعتمد على عناصر مصفوفة القيم الخاصة بالمجسم الأهليجي للسرعات المتبقية للنجوم [المصفوفة C في المعادلة (13)]. ولقد استقر بنا الرأي على هذا الاختيار لأن عناصر هذه المصفوفة  $(\mu_{ij})$  عبارة عن دوال مباشرة في بيانات فلكية يمكن قياسها وهي تحتوي على الخواص الكينماتيكية للمجموعة النجمية التي نحن بصدد دراستها. وهذا يعني إنه إذا كان هناك ارتباط بين الخواص الفيزيائية والخواص



الكينماتيكية لنجوم المجموعة فإن تلك العناصر أو دوال منها سوف تكون قادرة على إظهار هذا الارتباط دون غيرها أو على الأقل أكثر من غيرها .

### ١,٣ - الإحداثيات H و M

يعرف الإحداثي H بأنه مجموع القيم الخاصة  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  للمصفوفة C ويعرف الإحداثي M بأنه حاصل ضرب هذه القيم الخاصة ، أي أن

$$H = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \quad (30.1)$$

$$M = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (30.2)$$

المعادلة (18) لها ثلاث جذور حقيقية ومختلفة هي  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  ولذلك يمكننا كتابة الطرف الأوسط منها على الصورة

$$\lambda^3 + K_1 \lambda^2 + K_2 \lambda + K_3 = \lambda^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \lambda^2 + (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3) \lambda - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

وبمقارنة معاملات  $\lambda^2$  ومعاملات الحد المطلق في طرفي هذه المعادلة نجد أن

$$K_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \quad (31.1)$$

$$K_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (31.2)$$

وباستخدام المعادلات (19), (30), (31) نحصل على الإحداثيات الرأسية H و M :

$$H = \mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{33} \quad (32)$$

$$M = 2\mu_{12}\mu_{13}\mu_{23} + \mu_{11}\mu_{22}\mu_{33} - \mu_{23}^2\mu_{11} - \mu_{13}^2\mu_{22} - \mu_{12}^2\mu_{33} \quad (33)$$

### ٢,٣ - الإحداثيات $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

هذه الإحداثيات معرفة بالمعادلات (20), (21), (22), (29) ويمكن كتابتهم بدلالة  $\mu$ 's وذلك بعد حسابات مطولة ولكنها مباشرة حيث نجد :

$$\sigma_1 = \left[ -2\mathcal{S}^{1/2} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + 1/3(\mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{23}) \right]^{1/2} \quad (34.1)$$

$$\sigma_2 = \left[ \mathcal{S}^{1/2} \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\theta}{3}\right) \right\} + 1/3(\mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{33}) \right]^{1/2} \quad (34.2)$$

$$\sigma_3 = \left[ \mathfrak{S}^{1/2} \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\theta}{3}\right) \right\} + 1/3(\mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{33}) \right]^{1/2} \quad (34.3)$$

حيث إن

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{9} \left[ \mu_{11}\mu_{22} + \mu_{11}\mu_{33} + \mu_{33}\mu_{22} - 3(\mu_{12}^2 + \mu_{13}^2 + \mu_{23}^2) - (\mu_{11}^2 + \mu_{22}^2 + \mu_{33}^2) \right]$$

$$\theta = \tan^{-1} \left[ \left( -1 - \mathfrak{S}^3 / \mathfrak{R}^2 \right)^{1/2} \right]$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} = & +\mu_{12}\mu_{13}\mu_{23} - (1/3)\mu_{12}^2\mu_{33} - (1/3)\mu_{13}^2\mu_{22} - (1/3)\mu_{23}^2\mu_{11} - (1/18)\mu_{11}^2\mu_{22} \\ & - (1/18)\mu_{11}^2\mu_{33} + (1/6)\mu_{11}\mu_{12}^2 + (1/6)\mu_{11}\mu_{13}^2 - (1/18)\mu_{11}\mu_{22}^2 - (1/18)\mu_{22}^2\mu_{33} \\ & + (1/6)\mu_{12}^2\mu_{22} + (1/6)\mu_{23}^2\mu_{22} - (1/18)\mu_{11}\mu_{23}^2 - (1/18)\mu_{22}\mu_{33}^2 + (1/6)\mu_{13}^2\mu_{33} \\ & + (1/6)\mu_{23}^2\mu_{33} + (1/27)(\mu_{11}^2 + \mu_{12}^2 + \mu_{33}^2) + (2/9)\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33} \end{aligned}$$

٣, ٣ - الإحداثيات  $(\ell_i, m_i, n_i; i = 1, 2, 3)$

هذه الإحداثيات هي المتجهات الخاصة  $\underline{h}$  لمسألة القيم الخاصة  $C \underline{h} = \lambda \underline{h}$  للمجسم الأهليجي . ومن المعادلات (23), (24), (25), (29) نجد أن

$$\ell_i = \frac{1}{\mathfrak{R}_i} \left[ \mu_{22}\mu_{33} - \sigma_i^2(\mu_{22} + \mu_{33} - \sigma_i^2) - \mu_{23}^2 \right] \quad (35.1)$$

$$m_i = \frac{1}{\mathfrak{R}_i} (\mu_{23}\mu_{13} - \mu_{12}\mu_{23} + \sigma_i^2\mu_{12}) \quad (35.2)$$

$$n_i = \frac{1}{\mathfrak{R}_i} (\mu_{12}\mu_{23} - \mu_{13}\mu_{22} + \sigma_i^2\mu_{13}) \quad (35.3)$$

حيث إن

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_i = & \left[ (\mu_{22}\mu_{33} - \mu_{23}^2)^2 + (\mu_{23}\mu_{13} - \mu_{12}\mu_{23})^2 + (\mu_{12}\mu_{23} - \mu_{13}\mu_{22})^2 \right. \\ & + 2\left\{ (\mu_{22} + \mu_{33})(\mu_{23}^2 - \mu_{22}\mu_{33}) + \mu_{12}(\mu_{23}\mu_{13} - \mu_{12}\mu_{33}) \right. \\ & + \left. \mu_{13}(\mu_{12}\mu_{23} - \mu_{13}\mu_{22}) \right\} \sigma_i^2 + (\mu_{33}^2 + 4\mu_{22}\mu_{33} \\ & + \mu_{22}^2 - 2\mu_{23}^2 + \mu_{12}^2 + \mu_{13}^2) \sigma_i^4 - 2(\mu_{22} + \mu_{23}) \sigma_i^6 + \sigma_i^8 \left. \right]^{1/2} \end{aligned}$$

٤,٣ - الإحداثيات  $(L_i, B_i; i = 1,2,3)$ 

تعرف  $L$  و  $B$  على إنها خط الطول المجري وخط العرض المجري لاتجاهات القيمة النهائية للتشتت وتعطى بالمعادلات الآتية :

$$L_i = \tan^{-1} (-m_i / \ell_i) \quad (36.1)$$

$$B_i = \sin^{-1} (n_i) \quad (36.2)$$

٥,٣ - الإحداثي  $E$ 

يعرف هذا الإحداثي بأنه حجم الجسم الأهلجي ويعطى بالعلاقة

$$E = \pi (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) \quad (37)$$

٦,٣ - الإحداثيات الشمسية  $(\ell_A, b_A, S)$ 

هذه الإحداثيات ليست دوال صريحة في عناصر المصفوفة  $C$  ولكن لها أهمية ودور فعال في الخواص الكينماتيكية للمجاميع النجمية<sup>[4]</sup> :

$$\ell_A = \tan^{-1} (-\bar{V} / \bar{U}), \quad (38.1)$$

$$S = \left[ (\bar{U})^2 + (\bar{V})^2 + (\bar{W})^2 \right]^{1/2}, \quad (38.2)$$

$$b_A = \sin^{-1} (-\bar{W} / S). \quad (38.3)$$

## ٤ - التطبيقات والنتائج

البيانات الفلكية اللازمة لإتمام الدراسة تتمثل في المركبات المجرية للسرعة الفضائية  $(U, V, W)$  والتصنيف الطيفي  $(O, B, A, F, G, K, M)$  للنجوم . ولقد تمكنا من حصر هذه البيانات الفلكية لعدد ٢٦٦٠ نجم من مختلف الأنواع الطيفية وذلك من عدة أبحاث قام بنشرها كل من روبن<sup>[7]</sup> (Rubin) وإيجن (Eggen)<sup>[8,9,10,11,12]</sup> . ونظراً لأن مركبات السرعة الفضائية في بحث روبن منسوبة إلى النظام الإحداثي  $(\ell^I, b^I)$  وفي أبحاث إيجن منسوبة إلى النظام الإحداثي  $(\ell^{II}, b^{II})$  فقد قمنا بتحويل مركبات روبن إلى مركبات إيجن لتصبح البيانات متجانسة .

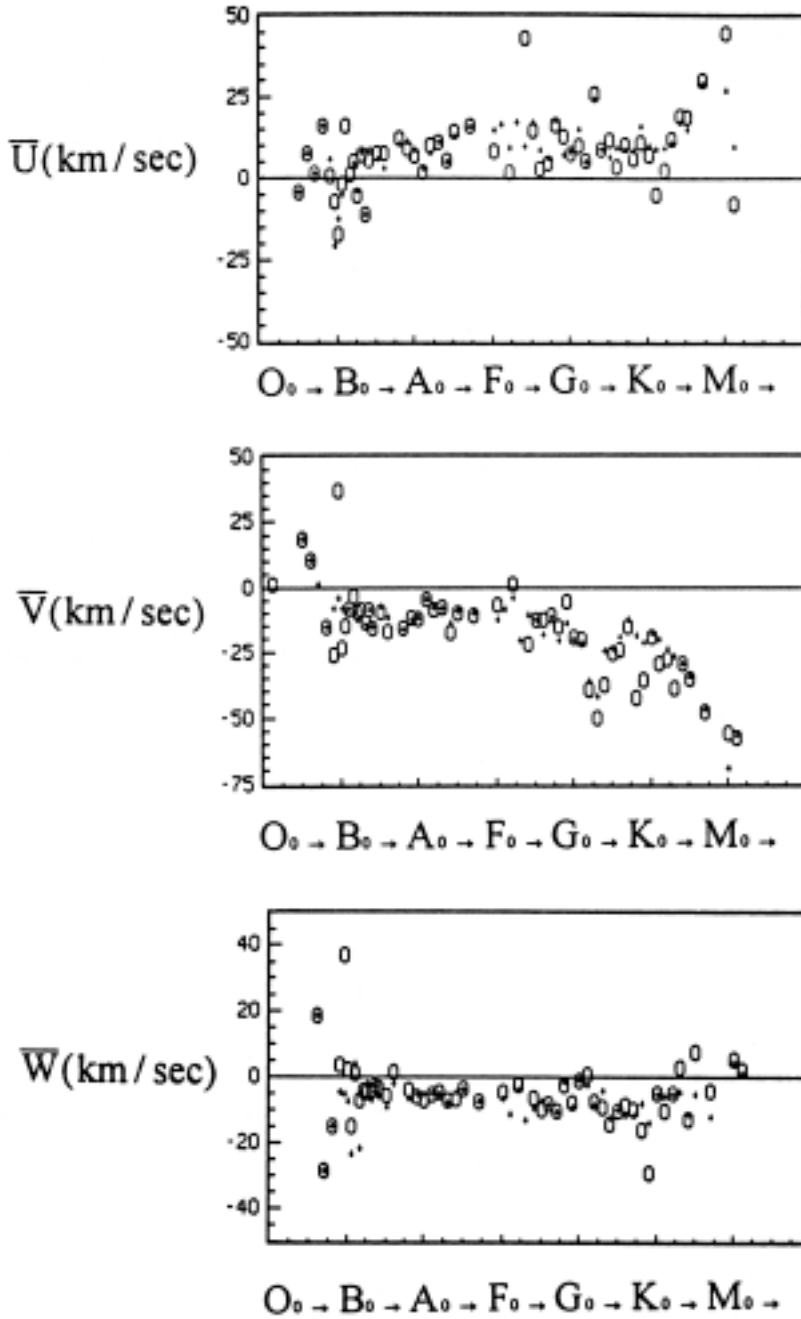
لكي نتمكن من اختيار المجموعة النجمية المناسبة لتطبيق نظرية المجسم الأهليجي عليها يجب علينا إجراء بعض الدراسات الإحصائية على النجوم التي تم جمع بياناتها الفلكية :

من حيث تصنيف الاستضاءة فإن لدينا ٩٩ نجم بتصنيف I و ٦٠ نجم بتصنيف II و ٧٧٥ نجم بتصنيف III و ٢٩٩ نجم بتصنيف IV و ١٣٦١ نجم بتصنيف V و ٨٦ نجم ليس لها تصنيف محدد . من هذه الإحصائية يتضح أن نجوم المتابعة الرئيسية (تصنيف V) تمثل ٥١٪ من المجموع الكلي وبالتالي يمكن استخدام هذه النجوم لدراسة تأثير الاستضاءة في اختيار العينة النجمية . في شكل رقم (١) رسمنا قيم مركبات السرعة الفضائية للمركز المتوسط مع التصنيف الطيفي لمجموعتين نجميتين : الأولى ممثلة بنجوم المتابعة الرئيسية والثانية ممثلة بجميع النجوم . يؤكد هذا الشكل على عدم وجود اختلافات كبيرة بين النموذجين أي أن تصنيف الاستضاءة ليس له تأثير في تطبيقات المجسم الأهليجي على الأقل في الدراسة التي نحن يصددها (في الحقيقة فإن عدد النجوم ٢٦٦٠ يعتبر رمزياً وقد لا يكون كافياً لإظهار حقيقة الفرق بين النموذجين) . بناءً على ذلك فسوف نهمل تصنيف الاستضاءة في الدراسة .

القدر الظاهري المرئي  $V_0$  (المصحح لظاهرة الاحمرار الناتجة عن تشتت ضوء النجم) لا يزيد عن ٦+ لعدد ١٦١٧ نجم ومحصور ما بين ٦+ و ٨+ لعدد ٩٠٥ نجم ولا يزيد عن ١٢+ لبقية النجوم . هذا يعني أن النجوم الخافتة قليلة جداً في العينة وبالتالي فلن يكون لها تأثير سلبي في تطبيق نظرية المجسم الأهليجي على هذه المجموعة النجمية .

قياسات أبعاد النجوم تعتبر دقيقة لعدد ١٧٩٩ نجم نظراً لأن هذه النجوم لا تبعد عن الشمس بأكثر من ٢٠٠ بارسك . عدد النجوم التي تبعد عن الشمس بأكثر من ٣ كيلوبارسك هو ٢٧ نجم وسوف نستبعد هذه النجوم في هذه الدراسة باعتبار أن قياسات أبعادها غير دقيقة . وبذلك تصبح مجموعتنا النجمية موزعة على كرة سماوية نصف قطرها ٣ كيلوبارسك .

الأنواع الطيفية (O6.5, O7.5, A8, G3.5, G6.5, K2.5, M4, M5) ممثلة بنجم واحد فقط والأنواع (A6, A9) ممثلة بنجمين والأنواع (B7, G8.5, M2) ممثلة بثلاث نجوم وهي



شكل (١) . علاقة مركبات السرعة الفضائية للمركز المتوسط مع التصنيف الطيفي لجميع النجوم (0) ولنجوم المتابعة الرئيسية فقط (+) .

بذلك لاتصلح لتطبيق نظرية المجسم الأهليجي عليها كمجموعات نجمية وينبغي حذفها من العينة النجمية . الأنواع الطيفية (Fp, Gp, Bp, Ap, Am) ممثلة بعدد ٨٣ نجم وسوف تهمل أيضاً لاختلاف تركيبها الكيميائي عن بقية النجوم .

بناء على ما سبق ، فإن مواصفات المجموعات النجمية المختارة للدراسة هي :

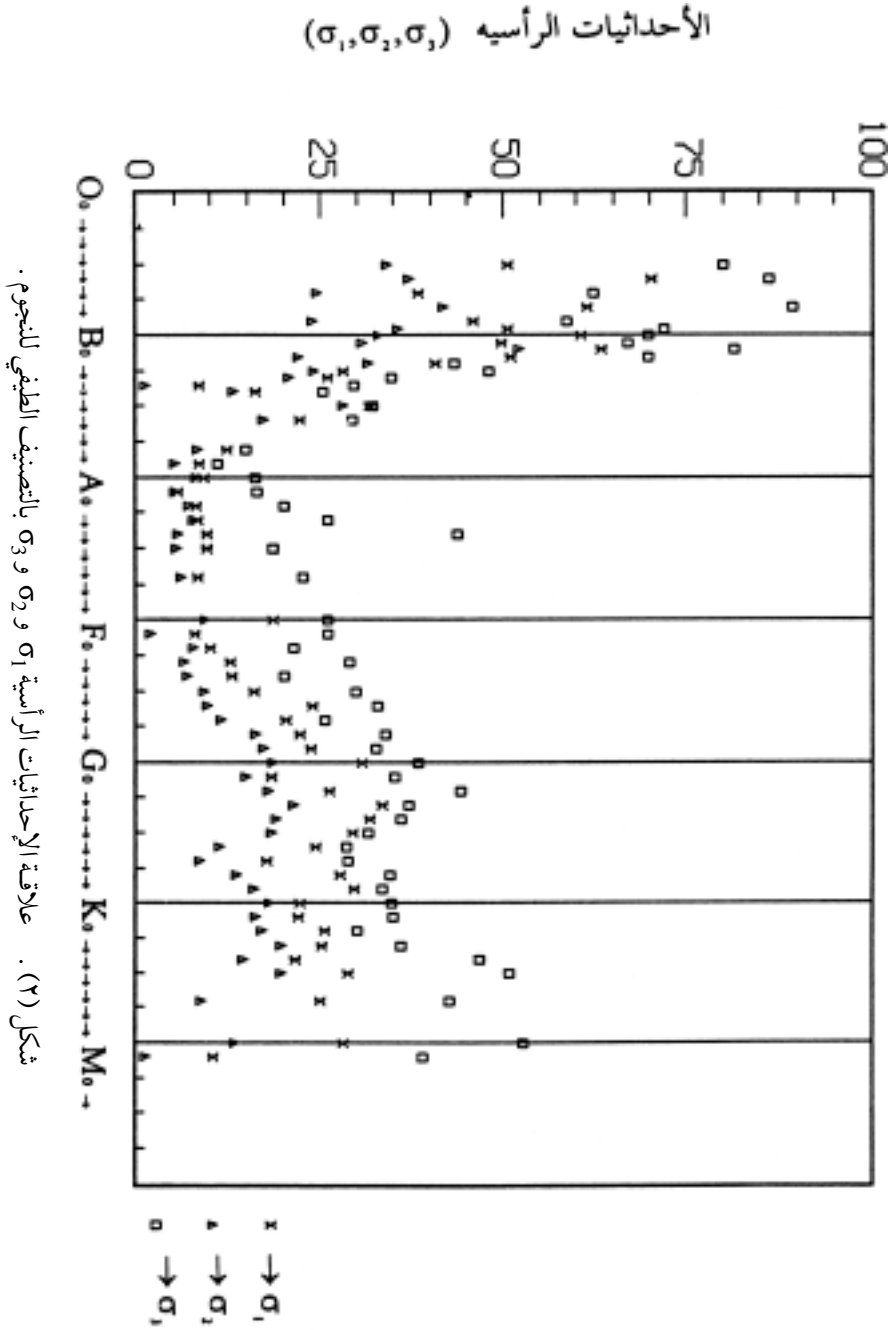
( أ ) العدد الإجمالي للنجوم هو ٢٥٢٩ نجم موزعين كالتالي : ١٠٠ نجم من نوع O ، ٨٠٥ نجم من نوع B ، ٣٠٤ نجم من نوع A ، ٢٣٥ نجم من نوع F ، ٤٥٣ نجم من نوع G ، ٦١٨ نجم من نوع K ، ١٤ نجم من نوع M .

(ب) النجوم موزعة داخل كرة سماوية مركزها الشمس ونصف قطرها ٣ كيلوبارسك .  
(ج) لمعان الغالبية العظمى من النجوم لايزيد عن القدر المرئي الظاهري +٨ وذلك لزيادة فاعلية هذه الدراسة .

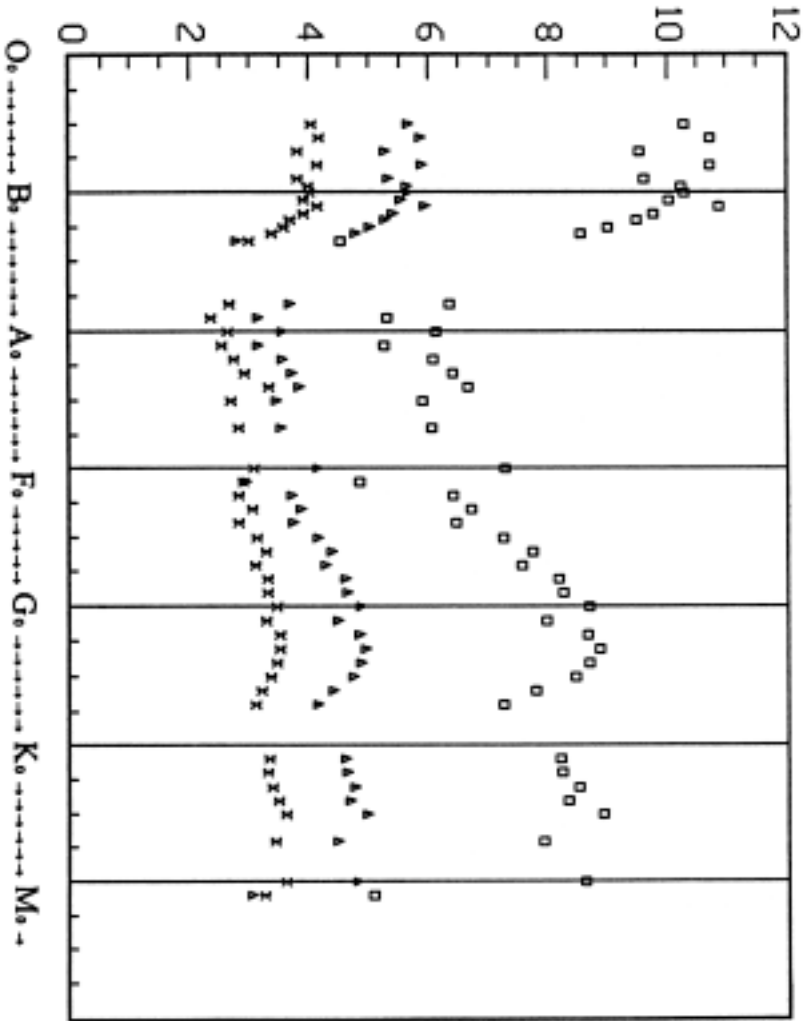
بتطبيق معادلات المجسم الأهليجي التي تم اشتقاقها في الجزء ٣ على هذه المجاميع النجمية ، أمكن الحصول على جميع الإحداثيات الرأسية لكل تصنيف طيفي . ومن الممكن طبعاً عرض النتائج على صيغة جداول عديدة ولكن نظراً لأن الهدف من هذه الدراسة هو معرفة ما إذا كان هنا ارتباط أم لا بين الإحداثيات الرأسية والتصنيف الطيفي فقد فضلنا عرض النتائج في أشكال بيانية ومعادلات رياضية .

في الأشكال (٢) و (٣) رسمنا قيم الإحداثيات الرأسية ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, E, H, M$ ) مع التصنيف الطيفي . تشير هذه الأشكال إلى وجود ارتباطات قوية بين هذه الإحداثيات والتصنيف الطيفي للنجوم . بالنسبة لبقية الإحداثيات التي تحدثنا عنها في الجزء ٣ فقد أظهرت توزيعاً عشوائياً مما يشير إلى عدم وجود أي ارتباطات محددة مع التصنيف الطيفي .

إن وجود ارتباطات قوية بين بعض الإحداثيات الرأسية والتصنيف الطيفي يعتبر تحقيقاً إيجابياً لهذا البحث ولا يبقى علينا الآن سوى معرفة العلاقات الرياضية التي تربط بين الإحداثيات الرأسية ودرجات الحرارة السطحية للنجوم والتي ترتبط بدورها مع التصنيف الطيفي<sup>[13]</sup> . لإيجاد العلاقات الرياضية المطلوبة فقد رأينا تقسيم درجات



الأحداثيات الرأسية (E, H, M)



▲ → E  
 × → H  
 □ → M

شكل (٣) . علاقة الإحداثيات الرأسية M و H و E بالتصنيف الطيفي للنجوم .



الحرارة إلى قسمين بحيث يغطي القسم الأول النطاق من ٥٠٠٠ إلى ١١٠٠٠ كلفن (النجوم المبكرة) ويغطي القسم الثاني النطاق من ١١٠٠٠ إلى ٢٩٠٠٠ كلفن (النجوم المتأخرة).

في الأشكال (٤) و (٥) رسمنا قيم بارمترات المجسم الأهليجي مع درجة الحرارة السطحية للنجوم T. كما رسمنا على نفس الأشكال نتائج المعادلات التي توصلنا إليها وهي:

أولاً: إذا كانت  $5000 < T(^{\circ}K) \leq 11000$  فإن

$$\sigma_1 = e^{(4.47-1.64 \times 10^{-4}T)}, \sigma_2 = e^{(4.06-2.48 \times 10^{-4}T)}, \sigma_3 = e^{(4.88-2.98 \times 10^{-4}T)};$$

$$\log(M) = 3275 \times T^{(-0.693)}, \log(H) = 160 \times T^{(-0.453)}, \log(E) = 855 \times T^{(-0.605)}.$$

ثانياً: إذا كانت  $11000 < T(^{\circ}K) \leq 29000$  فإن

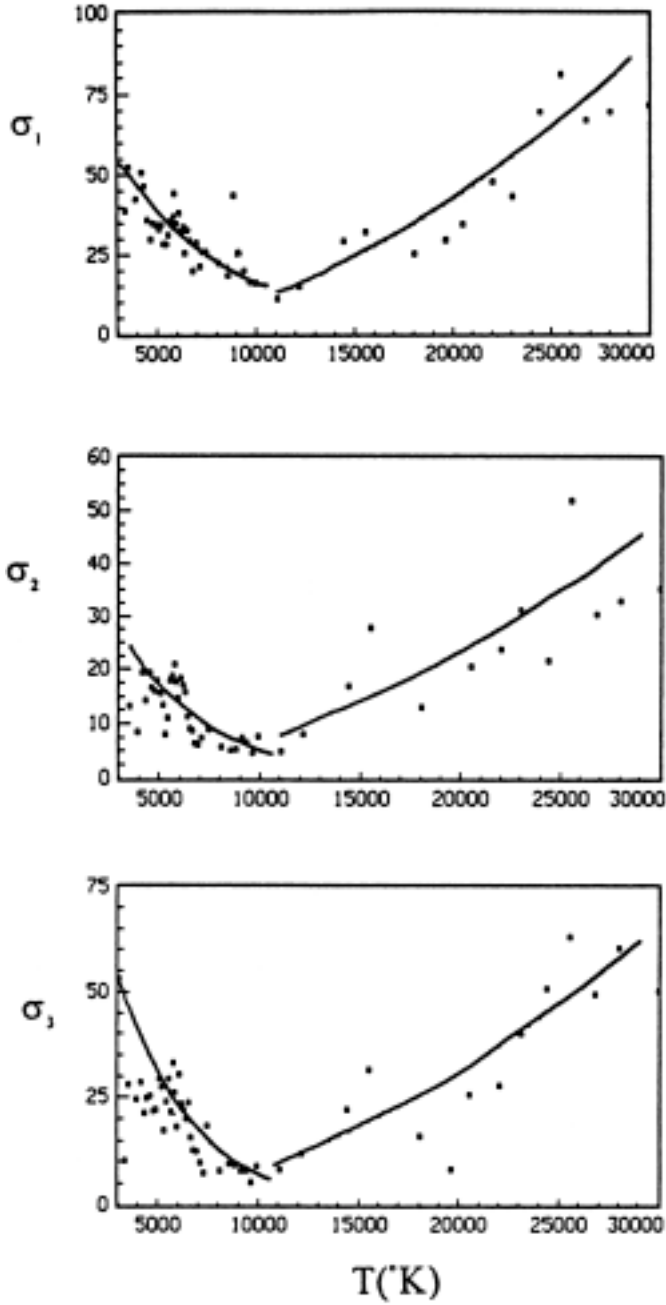
$$\sigma_1 = 2.33 \times 10^{-7}T^{(1.92)}, \sigma_2 = 5.19 \times 10^{-7}T^{(1.77)}, \sigma_3 = 2.53 \times 10^{-7}T^{(1.88)};$$

$$\log(M) = 0.02 \times T^{(0.61)}, \log(H) = 0.02 \times T^{(0.51)}, \log(E) = 0.02 \times T^{(0.54)}.$$

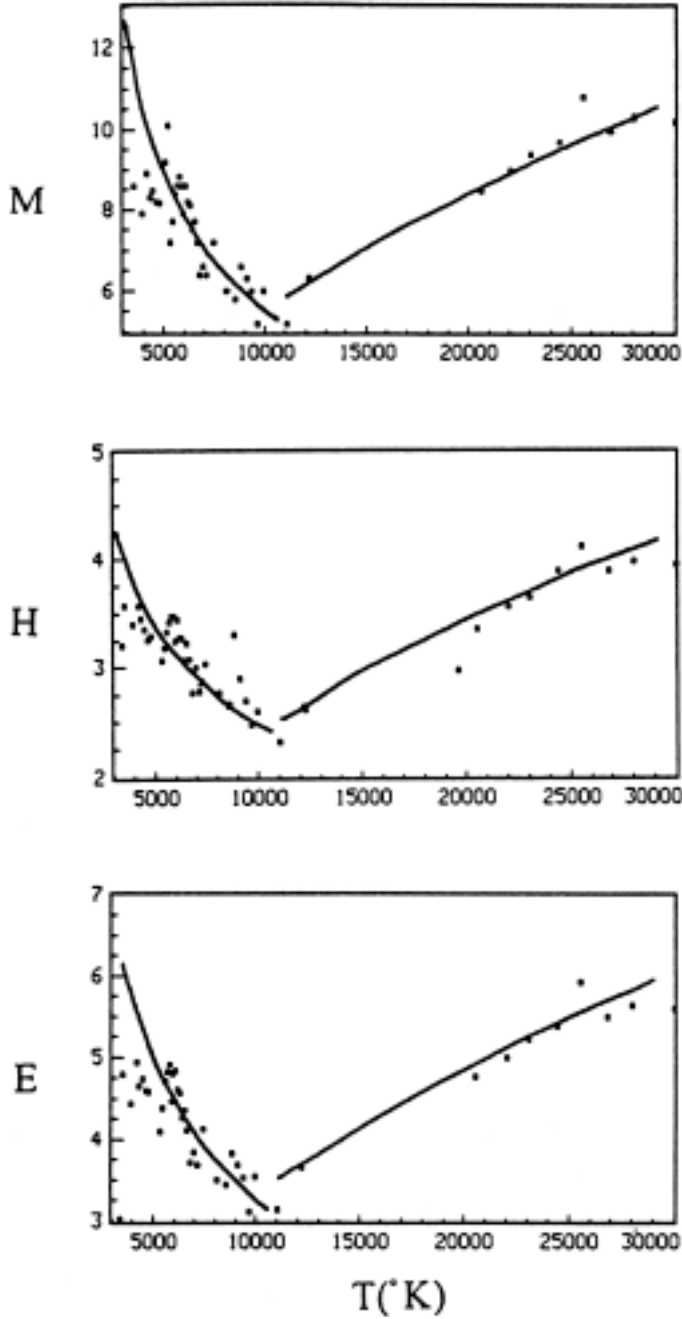
علماً بأن القيمة المطلقة لمعادلات الارتباطات في هذه المعادلات لاتقل عن ٨٥, ٠.

## الخلاصة

المعادلات الأساسية للمجسم الأهليجي لتوزيع السرعات المتبقية للنجوم تم اشتقاقها تحليلياً في الجزء (٢). وفي الجزء (٣) تم صياغة معادلات تحليلية لاتحتوي على أي تقريب لبعض متغيرات المجسم الأهليجي للسرعات المتبقية للنجوم بدلالة البيانات الفلكية التي يمكن قياسها بالأرصاد. وبذلك يمكن حساب هذه المتغيرات من الأرصاد مباشرة دون الحاجة إلى التحليلات الرياضية المعقدة. في الجزء (٤) تحدثنا عن البيانات الفلكية لعدد ٢٦٦٠ نجم كنموذج لتطبيق معادلات المجسم الأهليجي ودراسة العلاقة بين الخواص الكيمايكية والخواص الفيزيائية للنجوم. أسفرت النتائج إلى وجود ارتباطات قوية بين بعض متغيرات المجسم الأهليجي والتصنيف الطيفي للنجوم. وتبعاً لذلك فقد تم تشييد بعض العلاقات الرياضية التي تربط بين الخواص الفيزيائية (درجة



شكل (٤) . علاقة الإحداثيات الرأسية  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  و  $\sigma_3$  بدرجة حرارة النجم ، النقاط تمثل القيم المحسوبة والخطوط تمثل المعادلات الرياضية المستنتجة .



شكل (٥). علاقة الإحداثيات الرأسية  $H$  و  $E$  و  $M$  بدرجة حرارة النجم، النقاط تمثل القيم المحسوبة والخطوط تمثل المعادلات الرياضية المستنتجة.

الحرارة) والخواص الكينماتيكية (بعض متغيرات المجسم الأهليجي لتوزيع السرعات المتبقية) للنجوم .

شكر وتقدير . يسرنا أن نشكر O. J. Eggen الذي يعمل بالمرصد الوطني الأمريكي بتشيلي على تعاونه وإمدادنا بأهم أبحاثه المتخصصة في مجال هذا البحث .

ويسرنا أن نشكر W. H. Warren الذي يعمل بمركز البيانات الفلكية بوكالة ناسا لاقتراحاته الهادفة وإمدادنا بقائمة تحتوي على عناوين الكتالوجات الخاصة بالبيانات الفلكية المطلوبة لأبحاثنا المستقبلية والمعتمدة على نتائج هذا البحث .

#### References

- [1] **Smart, W.M.**, *Stellar Kinematics*, Longmans, Green & Co., London, (1968).
- [2] **Blaauw, A. and Schmidt, M.** (eds.), *Galactic Structure*. Chicago: University of Chicago Press, (1965).
- [3] **Ogorodnikov, K.F.**, *Dynamics of Stellar Systems*, Pergamon Press (Scotland) Ltd., (1965).
- [4] **Mihalas, D. and Binney, J.**, *Galactic Astronomy*, W.H. Freeman and Company, (1968).
- [5] **Sharaf, M.S., Ella, M.S. and Awad, M.E.**, *HIAG Bull., Egypt.*, VII, 1, (1987).
- [6] **Sharaf, M.S., Ella, M.S. and Awad, M.E.**, *HIAG Bull., Egypt.*, VII, 19, (1987).
- [7] **Rubin, V.C., Burley, J., Kiasatpoor, A., Klock, B., Pease, G., Rutscheidt, E. and Smith, C.**, *Astron. J.*, **67**, 8, (1962).
- [8] **Eggen, O.J.**, *Astron. J.*, **68**, 697, (1963).
- [9] **Eggen, O.J.**, *Astron. J.*, **92**, 910, (1986).
- [10] **Eggen, O.J.**, *Pup. Astron. Soc. Pacific*, **98**, 423, (1989).
- [11] **Eggen, O.J.**, *Pup. Astron. Soc. Pacific*, **101**, 54, (1989).
- [12] **Eggen, O.J.**, *Fund. of Cosmic Phys.*, **13**, 1, (1989).
- [13] **Allen, C.W.**, *Astrophys. Quantities*, 3rd ed., London, Athlone, (1973).

## The Correlation between Kinematical and Physical Properties of Stars

A. A. GOHARJI

*Astronomy Department, Faculty of Science  
King Abdulaziz University, Jeddah – Saudi Arabia*

ABSTRACT. Analytical expressions for some ordinates of the stellar space velocity ellipsoid have been derived. These expressions have been used to study the correlation between the kinematical properties (residual velocity) and the physical properties (spectral types or temperature) of stars. 2660 stars of various spectral types are included. Mathematical relations between some of the ordinates and stellar temperatures are obtained.